PAPELMÁTICA: GEOMETRIA DA DOBRADURA

GT 3 – Linguagem, educação matemática e tecnologias

Diego Zurawski Saldanha IFsul Venâncio Aires[1]

Anderson Antonio De Araujo IFsul Venâncio Aires[2]

Resumo: Este artigo visa mostrar a importância do desenvolvimento de atividades de dobraduras, tópico tão esquecido e negligenciado quando tocamos no assunto geometria plana. Atividades com dobraduras em papel com alunos de 6º e 7º anos foram desenvolvidas com o intuito de melhorar o aprendizado de conceitos importantes no ensino de geometria, enfatizando a atribuição de significados a figuras obtidas por essa via. A prática da dobradura estabelece memórias de longa duração relacionadas aos objetos construídos, essa dinâmica se desenvolve no tripé: neuro-fisiológico, psicológico e sócio-cultural, define o produto final da atividade – objetos geométricos – que se resume o objetivo geral do projeto: aprendizagem de conceitos geométricos.

Palavras-chave: Dobraduras, geometria plana, desenvolvimento psicomotor, demonstração, trabalho colaborativo.

Introdução: A aprendizagem das noções em geometria, objeto de estudo da disciplina de Matemática do Ensino Básico, é carregada de dificuldades, principalmente, quanto as suas significações. Em geral, a ênfase é dada aos resultados métricos e muito pouco é trabalhado quanto à significação e a necessidade da construção daqueles objetos (conceitos). Parte das dificuldades atribuímos à forma como esses conceitos são trabalhados. Tudo se passa como uma introjeção forçada nesse universo em que terminologias são decoradas,

[1]Mestre em matemática pura pela UFRGS. E-mail: diegosaldanha@ifsul.edu.br

[2]Mestre em educação matemática pela universidade Anhanguera. E-mail: Anderson_antonio_araujo@hotmail.com

sem nenhuma atribuição de significado aos termos listados. Pensamos em uma nova abordagem, que leve em conta atividades práticas que integrem controle motor (dobradura), atribuição de significado a significados geométricos (linguagem e pensamento) e relações dialógicas em um grupo (sócio-cultural).

O estudo de geometria na escola tem se caracterizado por uma ênfase no caráter quantitativo, onde o uso de fórmulas para cálculo de grandezas, associadas a questões que envolvem aspectos geométricos, é a tônica. Pouca ênfase é dada aos conceitos propriamente ditos e, muito menos ainda, à sua caracterização linguística através de palavras. Importante a ser enfatizado é a relação entre os aspectos neurofisiológicos, psicológicos e sociais na formação do conhecimento e do desenvolvimento integral do aluno. O trabalho em geometria com a utilização da dobradura fornece o desenvolvimento motor e estimula a atenção. O trabalho em grupo acelera o relacionamento social e traz à atividade, por sua vez, todo acervo histórico vivenciado por cada aluno.

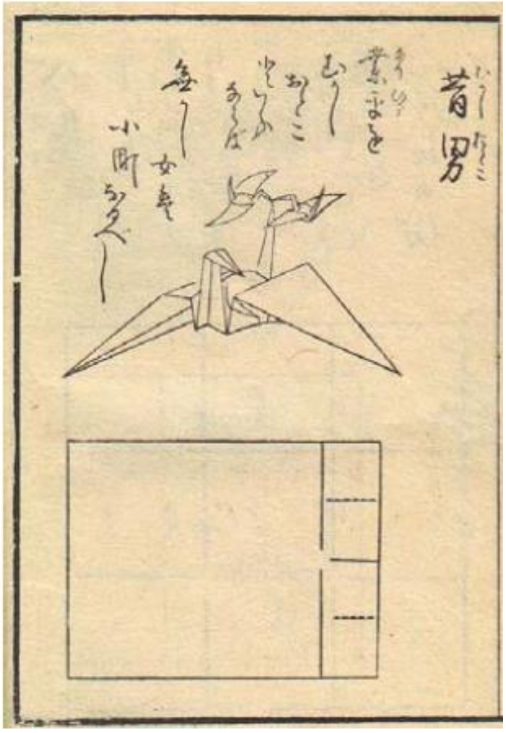
Aqui entra o instrumento básico da apredizagem: a linguagem. É através de seu desenvolvimento, mediado pelas questões que surgem nas atividades propostas pelo professor, que os alunos vão internalizando conceitos, no embate com seus colegas de aula. Tal interação entre os alunos e aluno-professor é um dos instrumentos mais relevante para que se aluno possa construir o conhecimento. A geometria é "prato feito" para tais ações. Aqui um vocabulário próprio vai se constituindo, ampliando o vocabulário e as ideias que norteiam a relação do aluno e seu meio de vivência.

A utilização de instrumentos, por exemplo, os materiais manipulativos e, além disso, o fato de uma parcela significativa de educadores não fazer uso de técnicas e teorias diversificadas em sala de aula, nos permitirá uma enorme contribuição na aprendizagem dos alunos por meio deste projeto. Assim, em face de magnitude deste tema, acreditamos ser de suma importância à produção de pesquisa a fim de melhorar o processo de ensino e aprendizagem das matemáticas.

Um pouco da história do origami: Origami, a arte da dobradura de papel possui sua palavra formada por ORI que significa dobrar e KAMI que significa papel. É tradicionalmente associado com a cultura japonesa, mas na realidade se originou, no entanto na China com a invenção do papel. Quase 500 anos depois que o papel foi inventado, monges budistas trouxeram o segredo para o Japão. Desta forma o origami evoluiu lentamente para se tornar o que hoje reconhecemos como dobradura de papel japonesa. De acordo com Barreto (2013 , p. 16) “Os registros sobre a origem do Origami não são claros, mas a ideia de que teria surgido na China junto com a invenção do papel não encontra fundamentos fortes, pois as evidencias sugerem que lá ele era utilizado apenas para escrever”.

Segundo Oliveira (2004 , p. 3) o emprego sistemático do origami se deu no período chamado de Tokugawa (1603-1867) surgindo por exemplo a famosa dobradura da cegonha chamada de tsuru e o autor nos remete a criação de dois importantes livros usados na confecção de origamis “Como dobrar mil pássaros de Sembazuru Orikata (1797) e Janela aberta e a estação de inverno de Kan no Mado (1845), neste último aparece pela primeira vez a base da rã, uma outra dobradura muito utilizada.”

Como dobrar mil Fonte : (Oliveira 2004)



Pássaros de Sembazuru Orikata Fonte : (Oliveira 2004)

Os árabes acabaram por nos dar uma contribuição enorme na divulgação da arte de se dobrar papel. A difusão dessa arte se deu no século VIII. Os mouros, por causa da religião mulçumana não podiam usar as dobraduras de papel com o intuito de fazer desenhos de figuras, mas como tinham um espírito matemático muito forte e enraizado na sua cultura usavam as técnicas de dobradura para realizar demonstrações matemáticas e com isso com as invasões mulçumanas a arte do origami se popularizou na Espanha no século XII. Conforme nos relata Barreto (2013 , p. 16) as dobraduras de papel receberam outro nome ao chegar na Espanha tendo também algumas características diferentes das dobraduras advindas do Japão

> Na Espanha, a arte de dobrar papel passou a ser chamada de papiroflexia e a pajarita, uma ave popular na Espanha, transformou-se no símbolo da papiroflexia. Entretanto, Koshiro Hatori acredita que as regras básicas de dobraduras japonesa e moura são muito distintas e, podem ter surgido de forma independente nas duas culturas.

O advento do uso do origami na América Latina se deu primeiramente através da Argentina que teve uma influencia grande dos colonizadores espanhóis e no Brasil a chegada dos imigrantes japoneses ajudou em muito a difusão dessa arte segundo nos relata Barreto(2008) “A arte do Origami chegou ao Brasil por intermédio do nosso país vizinho, a Argentina, que possui muita influência da cultura espanhola e, através dos imigrantes vindos do Japão, que começaram a chegar ao nosso país em 1908”.

Outro ponto a se ressaltar sobre a história do desenvolvimento do origami em outros países nos remete ao educador Alemão Friedrich Froebel (1782 – 1852) que de acordo com Oliveira (2004, p. 2) foi o criador do “kindergarten” no qual classificava o uso das dobraduras em 3 estágios :

- Dobras de verdade: Neste caso, as crianças trabalham com dobraduras, com o intuito de aprender conceitos de geometria Euclidiana envolvendo também construções geométricas.
- Dobraduras da vida: Neste caso, as dobraduras são usadas no sentido de obter desenhos de animais, pássaros servindo mais como uma recreação sem levar em conta algum rigor de demonstração matemática.
- Dobras da beleza: Frobel incentivava as crianças a fazerem arte com as dobraduras dando apoio para o aumento do intelecto das crianças.

Como se pode perceber a história da origem e do desenvolvimento do estudo do origami é muito vasta e não teria como em um único artigo descrever todas as nuances desta incrível arte. No tópico seguinte iremos falar do papel da demonstração usando as dobraduras de papel e como isso pode influenciar de modo positivo o aprendizado de nossos alunos.

A arte da dobradura de papel auxiliando na demonstração matemática: Hoje em dia, pouco, ou quase nenhum foco é dado à demonstração matemática e quando ocorre se faz uso de demonstrações voltadas aos aspectos algébricos em detrimento dos aspectos geométricos. Obviamente muitas demonstrações em geometria plana podem ser feitas usando conceitos de geometria analítica, mas como foi dito acima o uso sistemático de demonstrações usando o algebrismo acaba por enfraquecer o ensino da geometria nas salas de aula. A cultura de se realizar uma demonstração vem se tornando estagnada com o passar dos anos conforme nos diz Garbi (2010, p. 10)

> Antigamente demonstrava-se demais; hoje demonstra-se de menos. Em ambos os casos, esquece-se o verdadeiro objetivo da educação científica, que deve ser o de habituar gradativamente os alunos a pensar por si próprios, de maneira lógico-dedutiva.

Neste aspecto o uso da dobradura de papel vem ao encontro do estudante, no intuído de quebrar o paradigma de algo maçante e tedioso quando se fala de uma demonstração, pois o fato de usar dobraduras cria um ambiente onde a criatividade do aluno é colocada em prática além de desenvolver de forma primorosa a intuição, aumentar o capricho quando for realizar alguma atividade bem como o poder de memorização. Esses fatores, bem como outros nos ajudam a criar um ambiente propício para quebrarmos esse paradigma de uma aula enfadonha quando o professor deseja realizar alguma demonstração. O poder de visualização aumenta quando lidamos com dobraduras, o trabalho colaborativo pode ser incorporado fazendo do aluno um sujeito dinâmico no processo de aprendizagem. Lourenço (2002, p.88) nos fala a respeito disso

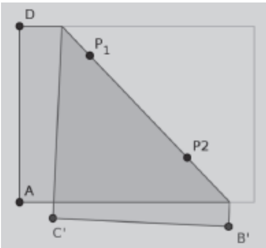
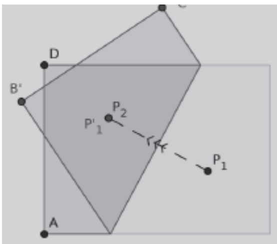
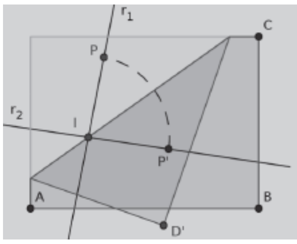
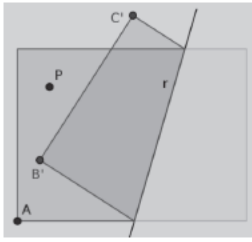
> A demonstração de uma proposição adquire grande credibilidade quando é apoiada em fatores visuais. Uma imagem ou uma sequência de imagens é capaz de convencer até mesmo observadores que não têm grande habilidade em Matemática e pouca familiaridade com artifícios e sutilezas de demonstrações formais. Entre aqueles que possuem uma tendência para a Matemática, a observação de imagens que sugerem resultados torna o trabalho muito mais interessante e, em geral, incentiva o estudante para a realizações de novas investigações As provas no sentido usual, necessárias em muitos casos, em geral satisfazem os matemáticos – e são dirigidas para eles - mas não convencem a maioria dos estudantes que, por não entendê-las, passa a decorar a sequência de palavras, traços e argumentos, e daí a repulsa pela Matemática.

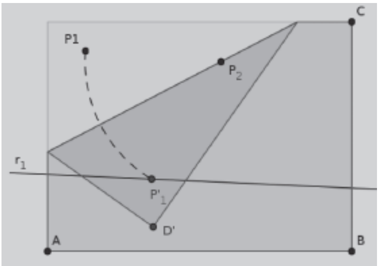
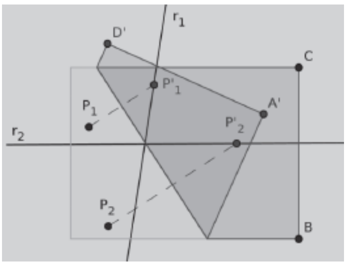
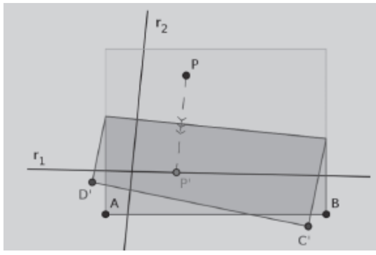
Quando nos deparamos com as dobraduras de papel temos também um conjunto de axiomas chamados de Axiomas de Huzita – hatori compostos por seis axiomas que na realidade são operações que nos permite fazer dobraduras para serem usadas no ensino de desenho geométrico. Rafael (2011, p. 19) nos fala a respeito disso

> Em 2001 Koshiro Hatori acrescentou à lista um sétimo axioma (obtendo-se a lista de axiomas de Huzita-Hatori) e, em 2003, Robert Lang publicou um estudo onde estabelece que, se identificarmos a expressão informal «construção em Origami» com uma certa caracterização formal desta noção então, aqueles sete axiomas que, como se disse,descrevem outras tantas operações básicas, são sufi cientes para obter todas as construções em Origami. Na teoria matemática das construções geométricas com dobragens de papel os sete axiomas de Huzita-Hatori chegam para defi nir o

> que é possível construir com dobragens simples. (Admitindo dobragens simultâneas já vamos além do que é descrito pelos axiomas de Huzita-Hatori, passando por exemplo,a ser possível dividir um ângulo genérico em cinco partes iguais ou a construir o polígono regular de onze lados, algo que não é possível recorrendo apenas a dobras simples.)

Para um maior entendimento do que foi exposto, segue abaixo o enunciado dos sete axiomas de Huzita - Hatori

Axioma I	Axioma II	Axioma III	Axioma IV
			

Axioma V	Axioma VI	Axioma VII
		

Os axiomas de Huzita – Hatori Fonte : (Rafael 2004)

Axioma I: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.

Axioma II: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir P_1 com P_2.

Axioma III: Dadas as retas r_1 e r_2 existe uma dobra que faz coincidir r_1 com r_2.

Axioma IV: Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra que é perpendicular a r e que passa por P.

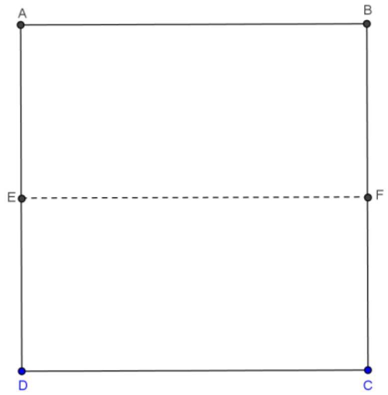
Axioma V: Dados dois ponto P_1 e P_2 e uma reta r, se a distância de P_1 a P_2 for superior ou igual a distância de P_2 a r então, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2.

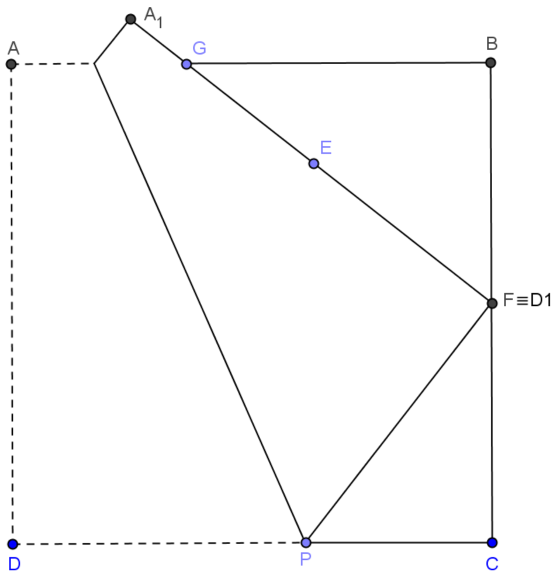
Axioma VI: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, se as retas não forem paralelas e a respectiva distancia não for superior a distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz incidir P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2.

Axioma VII : Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, se as retas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e é perpendicular a r_2.

Para darmos uma fundamentação ao que foi dito, vamos realizar usando dobraduras de papel a divisão de um segmento dado em três partes iguais e a partir disso demonstrar o teorema de Pitágoras.

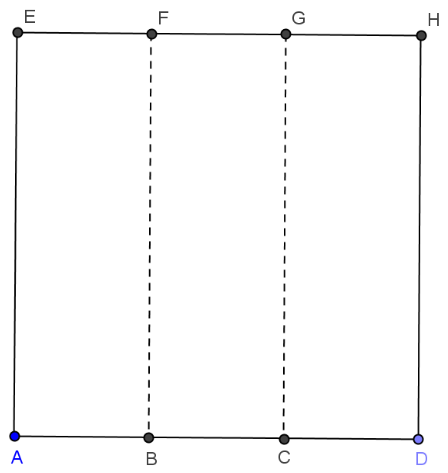
Divisão de um segmento em 3 partes iguais: Dividir um segmento em 2 partes iguais, ou em 4 partes iguais é um procedimento simples de ser realizado em geometria mas se desejarmos realizar o procedimento na divisão de um segmento em 3 partes iguais iremos encontrar uma dificuldade considerável mas fazendo-se uso das dobraduras de papel podemos obter uma solução que é colocada abaixo :

Passo 1 : Peguemos uma folha quadrada de vértices ABCD e com isso iremos fazer uma dobra coincidindo o vértice A com o vértice D e o vértice B com o vértice C. Com isso obtemos os pontos E e F pontos médios dos segmentos AD e BC respectivamente.	

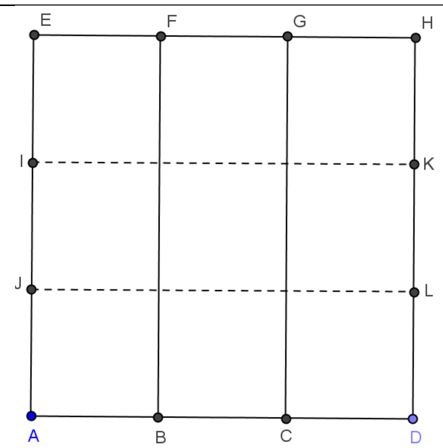
Passo 2 : Façamos o ponto D coincidir com o ponto F. Com isso, teremos A_1 como a nova posição do ponto A e D_1 como a nova posição do ponto D. Obtemos também o ponto G que é a intersecção dos segmentos AB e A_1D_1. Desta forma teremos um triângulo retângulo de cateto CF e o outro cateto e hipotenusa igual ao lado do quadrado. Com isso, conseguimos dividir o segmento AB em 3 partes iguais pois coincidindo os vértices B e G e fazendo a dobradura teremos a divisão do segmento em 3 partes iguais conforme o desejado.	

Demonstração do teorema de Pitágoras usando dobraduras: Tendo conhecimento da divisão de um segmento em 3 partes iguais podemos compreender uma demonstração do teorema de Pitágoras usando dobradura de papel. Vejamos os passos a seguir :

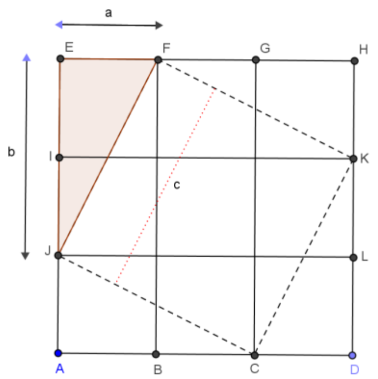
Passo 1 : Com um quadrado de papel ADHE façamos a divisão dos segmentos EH e AD em três partes iguais, obtendo os pontos F e G sobre o segmento EH e os segmentos B e C sobre o segmento AD.

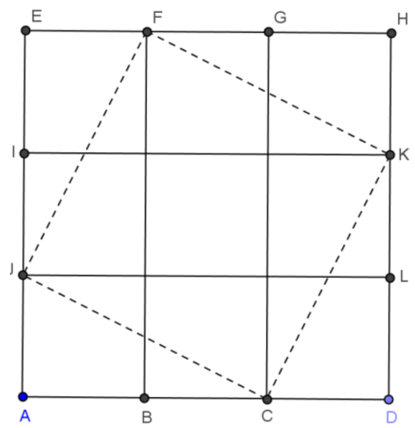


Passo 2 : Realizando os mesmos procedimentos com os segmentos AE e DH iremos obter os pontos I e J sobre o segmento AB e os pontos K e L sobre o segmento DH. Observemos também que os segmentos IK e JL são perpendiculares ao segmento AE bem como os segmentos BF e CG são perpendiculares ao segmento AD.



Passo 3 : Façamos as dobras CJ, JF, FK e KC. Com isso iremos obter o quadrado CJFK. Analisando as dobraduras teremos a figura abaixo :





Analisando essa última figura perceberemos que:

A área do quadrado ADHE é $(a+b)^2$	A área de um dos 4 triângulos sublinhado de vermelho é ab/2	A área do quadrado FKCJ é c^2

Logo :

Área(ADHE) = Área(FKCJ) + 4. Área(EFJ)   Então :

$(a + b)^2 = c^2 + 4. ab/2$ $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ $a^2 + b^2 = c^2$

que realmente é o nosso famoso teorema de Pitágoras.

As dobraduras de papel e o ambiente de geometria dinâmica: A arte de dobradura de papel pode ser implementada computacionalmente. Hoje em dia existem diversos programas destinados a auxiliar o individuo que tem o desejo de fazer dobraduras. Temos o programa Paper Folding 3D que permite visualizar dobraduras em três dimensões nos dando diversos tipos de exemplos. A arte da dobradura é dinâmica, o aluno não fica estático, realizando trabalhos colaborativos junto com colegas e por isso a junção entre dobradura de papel e ferramentas computacionais deve ser feita. Exemplo disso são os softwares de geometria dinâmica que permitem essa proximidade tornando melhor a visualização das dobraduras de papel. Brandão e Isotoni (2003, p. 4) nos fala sobre isso

> Em resumo, como a Geometria Dinâmica possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas, e assim facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos, podemos utilizar um programa de Geometria Dinâmica para revelar relações geométricas intrínsecas que poderiam passar desapercebidas numa representação estática. Com isso, o professor pode incentivar o espírito investigativo do aluno, solicitando ao final uma justificativa para as relações encontradas (rumo a uma a prova matemática), podendo ser mais formal de acordo com o nível de aprendizagem do aluno.

No intuito de exemplificar vamos realizar a construção de uma cônica chamada parábola usando dobradura e mostrar através do software de geometria dinâmica GeoGebra sua construção e analisar a praticidade de se fazer uma verificação da dobradura neste ambiente computacional.

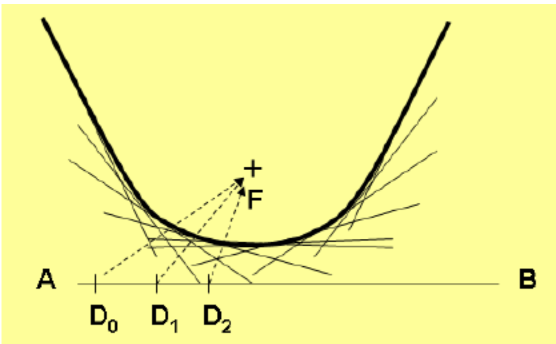
Parábola: É o lugar geométrico plano de todos os pontos equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa de um determinado plano. Para realizarmos a dobradura com o intuito de se obter uma parábola iremos seguir os passos abaixo:

Construção da parábola via dobradura:

i) Desenhe uma reta, horizontalmente numa folha de papel e marque, fora dessa reta, um ponto fixo F.

ii) Pegue um ponto D sobre a reta, faça a dobradura de forma a coincidir os pontos D e F. Trace sobre o papel a reta que coincide com a dobra.

iii) Refaça o item ii) remarcando o ponto D sobre a reta. Realizado esta operação diversas vezes poderá observar que as dobras parecem tangenciar uma curva. Esta curva parece uma parábola.



Fonte : (Oliveira 2004)

Esse procedimento, usando dobraduras, nos permite realmente realizar a construção, obtendo assim o lugar geométrico desejado. Um empecilho que surge é verificar a validação pois teremos de realizar o passo ii) diversas vezes até conseguirmos ter uma visualização consistente do desenho da parábola mas usando o software em questão conseguiremos vislumbrar a figura de forma mais rápida e dinâmica.

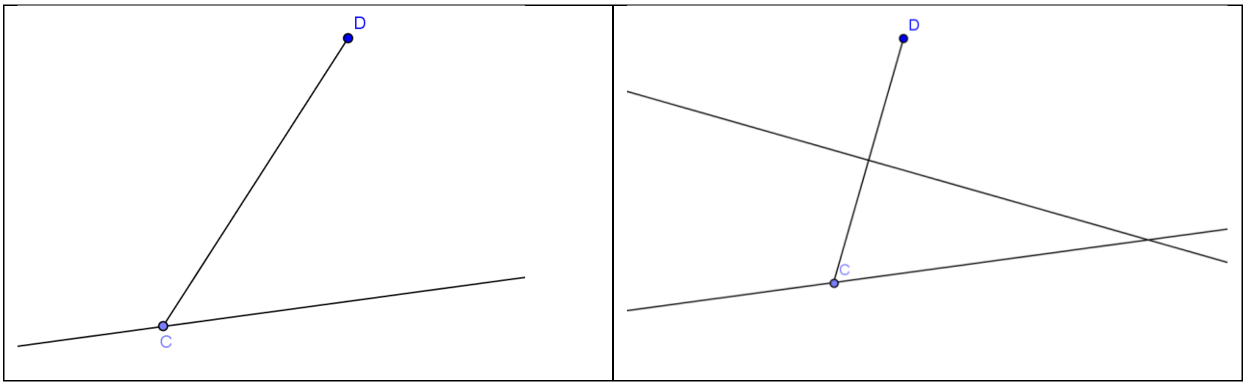
Construção da parábola via software GeoGebra:

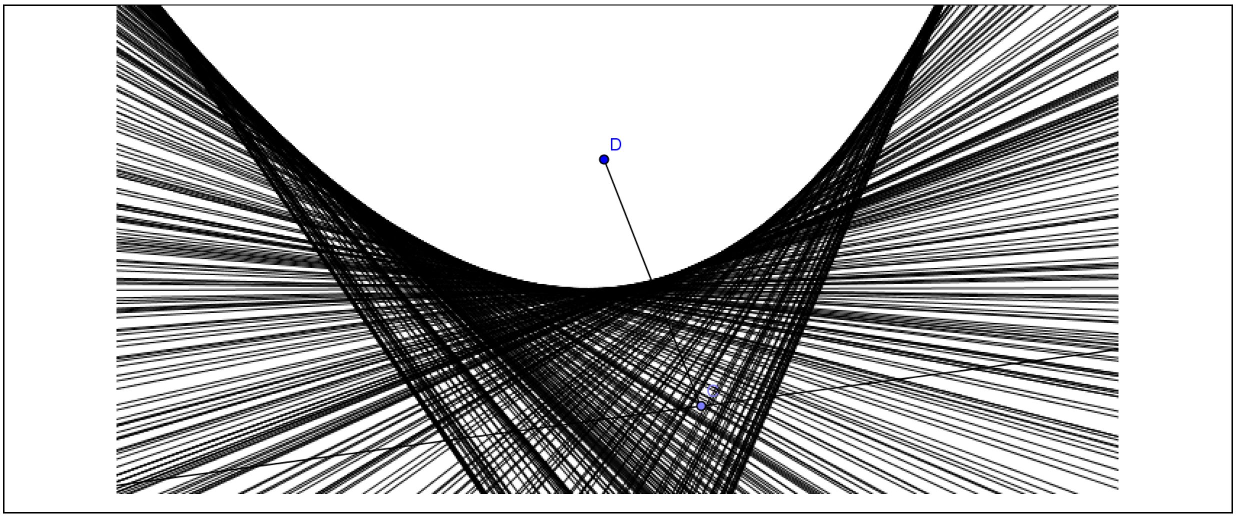
i) Crie uma reta r marcando um ponto C sobre essa reta e um ponto D fora dessa reta.

ii) Construa o segmento CD e em seguida crie a mediatriz desse segmento.

iii) Com o botão direito do mouse clique sobre a reta mediatriz e habilite a opção rastro.

Fazendo os procedimentos acima teremos a parábola abaixo.





Logo, o professor que tem o desejo e costume de trabalhar com dobraduras em sala de aula possui essa possibilidade a mais para que consiga através de papel e lápis e um computador dar um dinamismo um pouco maior em sala de aula.

Conclusões: O uso de dobraduras em sala de aula permite ao professor trabalhar com grupos colaborativos onde os alunos realmente interagem dentro da sala de aula. O docente se torna um mediador e os alunos seres capazes de fazer uma matemática mais prática que pode ser colocada e ensinada de diversas formas usando essa metodologia. Além disso, o uso de origamis pode ser usado em outras disciplinas como em artes, aumentando o conhecimento cultural pois existem diversos modelos de origamis que são feitos com esse intuito.

Outra função do origami é o seu uso na área de terapia com pacientes com problemas psicomotores não importando a idade, podendo ser crianças, jovens e idosos conforme nos fala Ueno(2003, p. 28) :

- Por precisar usar apenas o papel, sua prática é simples e segura em pacientes com comportamento de automutilação e potencialmente agressivos e imprevisíveis.
- É extremamente atrativo, pois se tem a possibilidade de trabalhar com diferentes cores, modelos e dobras, que podem ser das mais simples às mais desafiadoras, além de se praticar sozinho ou acompanhado, como observador ou atuante.

Temos também o uso das dobraduras na confecção de acessórios para embalagens de produtos e seu uso que não foi descrito nesse artigo na geometria espacial que será tema de um novo artigo onde teremos um detalhamento com maior profundidade das suas aplicações.

REFERÊNCIAS

BARRETO, C. A geometria do origami como ferramenta para o ensino da geometria Euclidiana na educação básica. 2013. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em matemática em rede nacional) – Universidade federal de Sergipe, Sergipe, 2013.

BRANDÃO, L; ISOTANI, S. Uma ferramenta para ensino de geometria dinâmica na internet: igeom. In: XXIII CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, Campinas – SP. Anais ... 2003. p. 1476–1487

CARVALHO. Os três problemas clássicos da Matemática Grega. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., Bahia, BA. Mini Curso...2004. p. 1-21

CONTADOR, P. Matemática, uma breve história. 2.ed. São Paulo: Livraria Física, 2006. v1. 465 p.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução: Higyno H. Domingues, Titulo original "An introduction to the history of mathematics". 1.ed. Campinas: UNICAMP, 2004. 843 p.

EVES, H. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria. 1.ed. São Paulo: Atual, 1992. v 3. 77 p.

GARBI, G. C.Q.D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. 1. Ed. São Paulo : Livraria da física, 2010. 403 p

LOURENÇO, M. A demonstração com informática aplicada à educação, Bolema, Rio Claro - SP, n. 18, p. 82 – 92, 2002

OLIVEIRA, Fátima Ferreira. Origami: Matemática e Sentimento. [2004] Disponível em <http://www.voxxel.com.br/fatima/origami/origami.pdf>, acessado em 26 de julho de 2014.

PUTNOKI, J. C. Desenho Geométrico. São Paulo: Editora Scipione, 1991.

RAFAEL, I. Origami. Disponível em : < http://www.apm.pt/files/_EM114_pp16-22_4e6489d4d25fc.pdf > Acesso em : 25 julho 2014

SOUZA, J. M. R. Trissecção do ângulo e duplicação do cubo: As soluções na antiga Grécia. 2001. 114 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2001.

UENO, T. R. Do origami tradicional ao origami arquitetônico: Uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações no design contemporâneo. 2003. 103 f. Dissertação (Mestrado em arquitetura) – Universidade estadual Paulista, Bauru, 2003.

WAGNER, E. Construções Geométricas. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. 110 p