

TEORIA DE WAVELETS E SUAS APLICAÇÕES NA ENGENHARIA

Frederico Scherer Butzke¹
Ruben Panta Pazos²

RESUMO

As *Wavelets*, ou onduletas, em português, são uma outra forma de analisar sinais e ondas de uma função não estacionária. Esta técnica ganhou muita força nos últimos anos em todos os campos das engenharias que trabalham com processamento de sinais, porém sua descoberta ocorreu já nos meados do século XX. Este trabalho visou a avaliar os métodos das *Wavelets* comparativamente com os métodos de resoluções de equações diferenciais ordinárias tradicionais, como Euler e Runge-Kutta.

Palavras-chave: *Wavelets*. Equações Diferenciais. Processamento. Sinais.

ABSTRACT

Wavelets are another way to analyse waves and signals of a specific function. This technique became much recognized in the past years in many engineering fields that work with digital signal processing. However, its discovery happened in the beginning of the past century. This work aimed to evaluate the Wavelets methods comparing with traditional resolution methods of differential equations, such as Euler and Runge-Kutta.

Keywords: Wavelets. Differential Equations. Signal. Processing.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo teve o objetivo de analisar os resultados obtidos de duas formas de equações diferenciais ordinárias, os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta, que serão analisados comparativamente com o estudo de *Wavelets*, as quais são uma outra maneira de representar formas de onda de uma determinada função.

Equações e funções estão presentes no dia a dia; mesmo que não as notemos, elas existem. Quando simplesmente utilizamos uma “regra de três” estamos utilizando de uma função dependente de uma ou mais variáveis para obter um determinado valor que buscamos. O campo da matemática e engenharia é onde estas equações são exploradas mais a fundo, sendo a base de todo o conhecimento. Em física, cálculo, química, por exemplo, trabalhamos

¹ Frederico Butzke - Departamento de Informática da Universidade de Santa Cruz do Sul. <fredericobutzke@mx2.unisc.br>

² Prof. Dr. Rubén Panta Pazos - Departamento de Matemática da Universidade de Santa Cruz do Sul. <rpazos@unisc.br>

com diversas misturas e dados, visando a resolver um determinado problema para implementar um sistema, o que sem o conhecimento destes tipos de cálculos se torna inviável.

No campo de processamento de sinais são utilizadas as funções de *Wavelets*, ou onduletas, para a compressão, transmissão e recepção dos dados pelos diversos dispositivos existentes no mercado. As transformadas *Wavelets* representam uma nova ferramenta matemática, cujo desenvolvimento aconteceu principalmente nos últimos 25 anos do século XX. São eficientes para a análise local de sinais dependentes do tempo, não estacionários e de variação abrupta.

A primeira família de *wavelets* foi descoberta pelo matemático húngaro Alfred Haar em 1909, ao estudar novas famílias de funções ortogonais. O nome e a noção de *wavelet* – em sua forma atual – foram dados pela equipe de estudos do Centro de Física Teórica de Marselha, composto pelo geofísico Jean Morlet e pelo matemático Yves Meyer, que trabalharam sob a orientação do físico Alex Grossman. Criou-se a família de funções com características de ortogonalidade e com suporte compacto, que foram utilizadas para decompor um sinal transiente não estacionário e variação abrupta permitindo desta forma realizar uma análise eficiente do sinal. Coube a Ingrid Daubechies um avanço do maior destaque na teoria de *wavelets*. Os estudos de Daubechies começaram a serem publicados já em 1988. Em conjunto com Stephane Mallat, Daubechies desenvolveu estudos orientados ao processamento de sinais discretos. A ideia fundamental da teoria de *wavelets* é realizar análises conforme seja a escala. O interesse crescente da teoria de *wavelets* hoje em dia deve-se à capacidade de representar sinais que possuem características diferentes para instantes e domínios especiais diferentes. Além disso, podem implementar-se de uma maneira computacional eficiente, em virtude ao denominado análise de multiresolução.

2 METODOLOGIA

A metodologia desta pesquisa constitui-se em desenvolver algoritmos computacionais para a realização de diversos experimentos com equações diferenciais e compará-las e analisar seus resultados.

Foram desenvolvidos dois algoritmos, um para o método de Euler e outra para o método de Runge-Kutta. Como foi possível perceber em capítulos anteriores, o método de Runge-Kutta é uma evolução ao Euler e seu grau de precisão é maior. Portanto vamos obter os dois tipos de resultados.

O resumo de como foi baseada a implementação deste trabalho é aplicar as equações aos algoritmos e analisar os resultados. Abaixo é apresentado o código desenvolvido para o método de Euler, na Figura 1. O código de Euler, tanto quanto o de Runge-Kutta, foram já desenvolvidos sendo possível o teste de equações de 4ª ordem. Ele é a representação algorítmica do método de Euler.

Figura 1 - Código em Javascript. Método de Euler

```
function Euler(xo, yo, zo, h, xmax){
    var x = new Array();
    var y = new Array();
    var z = new Array();

    x[0] = xo;
    y[0] = yo;
    z[0] = zo;

    var i = 0;
    while(x[i] < xmax){
        i++;
        x[i] = x[i - 1] + h;
        y[i] = y[i - 1] + h * f(x[i - 1], y[i - 1], z[i - 1]);
        z[i] = z[i - 1] + h * g(x[i - 1], y[i - 1], z[i - 1]);
    }

    var returnArray = new Array();
    returnArray[0] = x;
    returnArray[1] = y;

    return returnArray;
}
```

Os algoritmos para o método de Runge-Kutta são apresentados na Figura 2.

Para a pesquisa foram utilizadas quatro equações como exemplo para os cálculos e apresentação, que são as equações 1 a 4, apresentadas a baixo (Figura 3). Os testes foram realizados com a aplicação dos dois métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias de valores iniciais, Euler e Runge-Kutta, em todas as equações e com a variação de alcance de seus domínios, ou, valores do eixo x.

Figura 2 - Código em *Javascript*. Método de Runge-Kutta

```

function RungeKutta(xo, yo, zo, h, xmax){
  var x = new Array();
  var y = new Array();
  var z = new Array();

  x[0] = xo;
  y[0] = yo;
  z[0] = zo;

  var i = 0;

  while(x[i] < xmax){

    i++;

    var k1 = h * f(x[i - 1],
                  y[i - 1],
                  z[i - 1]);

    var l1 = h * g(x[i - 1],
                  y[i - 1],
                  z[i - 1]);

    var k2 = h * f(x[i - 1] + (1/2) * h,
                  y[i - 1] + (1/2)*k1,
                  z[i - 1] + (1/2)*l1);

    var l2 = h * g(x[i - 1] + (1/2)*h,
                  y[i - 1] + (1/2)*k1,
                  z[i - 1] + (1/2)*l1);

    var k3 = h * f(x[i - 1] + (1/2)*h,
                  y[i - 1] + (1/2)*k2,
                  z[i - 1] + (1/2)*l2);

    var l2 = h * g(x[i - 1] + (1/2)*h,
                  y[i - 1] + (1/2)*k1,
                  z[i - 1] + (1/2)*l1);

    var k3 = h * f(x[i - 1] + (1/2)*h,
                  y[i - 1] + (1/2)*k2,
                  z[i - 1] + (1/2)*l2);

    var l3 = h * g(x[i - 1] + (1/2)*h,
                  y[i - 1] + (1/2)*k2,
                  z[i - 1] + (1/2)*l2);

    var k4 = h * f(x[i - 1] + h,
                  y[i - 1] + k3,
                  z[i - 1] + l3);

    var l4 = h * g(x[i - 1] + h,
                  y[i - 1] + k3,
                  z[i - 1] + l3);

    x[i] = x[i - 1] + h;
    y[i] = y[i - 1] + (1/6.0)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    z[i] = z[i - 1] + (1/6.0)*(l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4);

  }

  var returnArray = new Array();
  returnArray[0] = x;
  returnArray[1] = y;

  return returnArray;
}

```

Figura 3 – Equações-exemplo para cálculo e apresentação

$$\frac{d y}{d t} = \sin(t - y). \quad (1)$$

$$\frac{d y}{d t} = \sin(t) + \sin(5.3 t y) \quad (2)$$

$$\frac{d y}{d t} = 50 t (1 - t) \cos(27 t - 3) \chi_{[0,1]} \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \sin(t) \frac{d y}{d t} + 4 y = 50 t (1 - t) \cos(27 t - 3) \chi_{[0,1]} \quad (4)$$

3 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados dos testes realizados através dos algoritmos desenvolvidos. Eles estão divididos por tópicos, sendo cada tópico para uma equação apresentada anteriormente.

As amostras foram capturadas considerando seus cinco primeiros valores, o valor mediano e o último valor, assim mostrando brevemente sua trajetória. A amostra é traduzida em um gráfico gerado, assim apresentado o valor absoluto dos valores gerados na abscissa e na ordenada.

- Equação 1

Para os testes com esta equação foram utilizados os valores iniciais de $x = y = 0$ e o salto de 0,01 com valor de parada em $x = 1$. A comparação entre resultados de Euler com Runge-Kutta é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 - Comparação Entre Resultados de Euler e Runge-Kutta

X	Runge-Kutta	Euler
0	0	0
0,01	0,00005	0
0,02	0,000199	0,0001

0,03	0,000446	0,000299
0,04	0,000789	0,000596
0,05	0,001229	0,00099
0,5	0,105209	0,103707
1	0,356499	0,354659

- Equação 2

Para os testes com esta equação foram utilizados os valores iniciais de $x = y = 0$ e o salto de 0,01 com valor de parada em $x = 0,05$. A comparação entre resultados de Euler com Runge-Kutta é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 - Comparação Entre Resultados de Euler e Runge-Kutta

X	Euler	Runge-Kutta
0	0	0
0.01	0	0.00005
0.02	0.0001	0.0002
0.03	0.0003	0.000451
0.04	0.000601	0.000802
0.05	0.001002	0.001254

- Equação 3

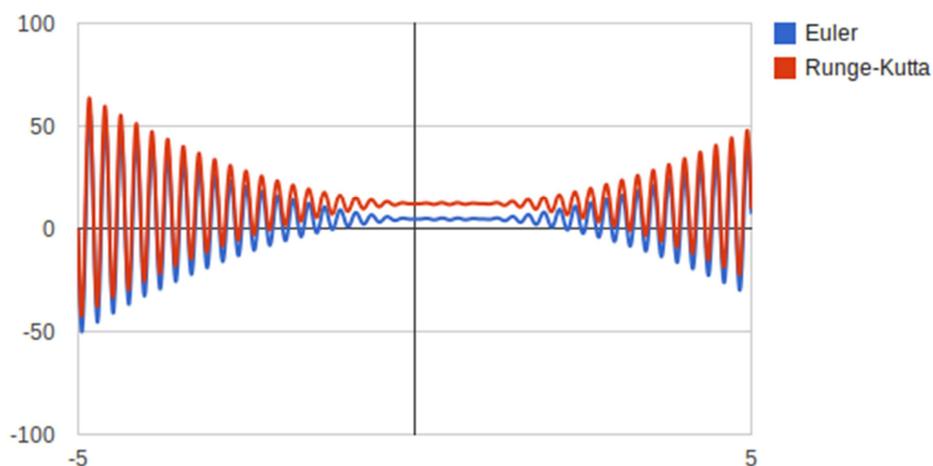
Para os testes com esta equação foram utilizados os valores iniciais de $x = -5$ e $y = 0$ e o salto de 0,01 com valor de parada em $x = 5$. A comparação entre resultados de Euler com Runge-Kutta é apresentado na Tabela 3 e no Figura 4.

Tabela 3 - Comparação Entre Resultados de Euler e Runge-Kutta

X	Euler	Runge-Kutta
-5	0	0
-4,99	-14,604733	-13,943796
-4,98	-27,719699	-25,917175

-4.97	-38.408736	-35.069951
-4.96	-45.91776	-40.761888
-4.95	-49.727893	-42.607415
-0.05	4.43276	11.820958
-0.04	4.442066	11.832037
-0.03	4.454361	11.84449
-0.02	4.466486	11.855433
-0.01	4.475887	11.862734
0	4.480895	11.865244
0.01	4.480895	11.862893
0.02	4.476359	11.856661
0.03	4.468748	11.848422
0.04	4.460304	11.840679
0.05	4.453735	11.836226
4.95	40.347652	46.622479
4.96	37.703247	42.737442
4.97	32.621166	36.57451
4.98	25.44924	28.5617
4.99	16.690689	19.265661
5	6.968875	9.351659

Gráfico 4 - Comparação dos Resultados Equação



- Equação 4

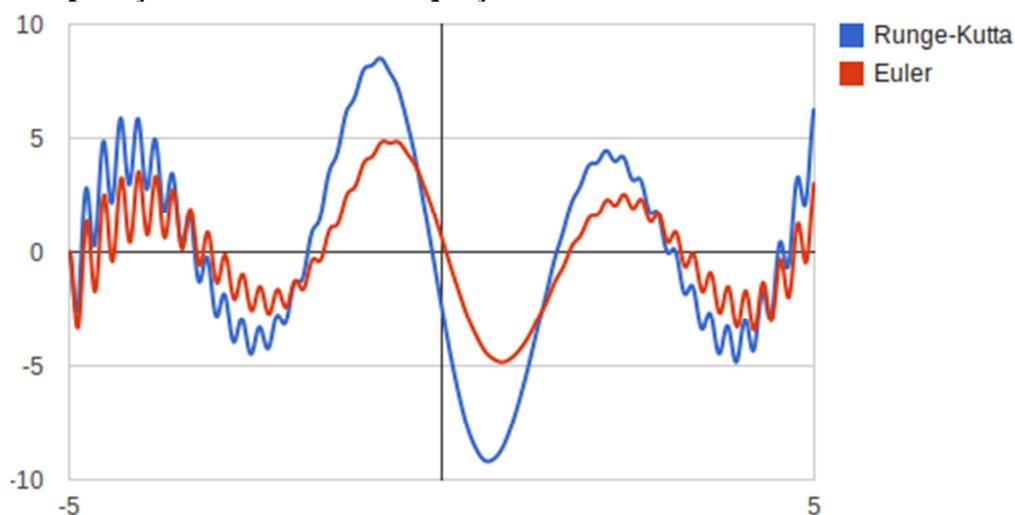
Esta equação é uma equação de segunda ordem, pois possui dois níveis de derivação. Portanto, precisamos realizar o cálculo quebrando-a em duas equações de primeira ordem e por isso faz-se necessário uma nova variável, chamada Z. Para os testes com esta equação foram utilizados os valores iniciais de $x = -5$ e $z = y = 0$ e o salto de 0.01 com valor de parada em $x = +5$. A comparação entre resultados de Euler com Runge-Kutta é apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 - Comparação Entre Resultados de Euler e Runge-Kutta

X	Euler	Runge-Kutta
-5	0	0
-4.99	0	-0.07073
-4.98	-0.146047	-0.270475
-4.97	-0.42184	-0.573917
-4.96	-0.801804	-0.948476
-4.95	-1.253016	-1.356722
-0.05	1.145841	-1.479873
-0.04	1.042199	-1.67066
-0.03	0.938139	-1.860736
-0.02	0.833744	-2.050005
-0.01	0.729064	-2.238399
0	0.624123	-2.425867
0.01	0.51893	-2.612364
0.02	0.413488	-2.797842
0.03	0.307803	-2.982239
0.04	0.201898	-3.165469
0.05	0.095817	-3.347423
4.95	1.334052	4.67231
4.96	1.775569	5.133641
4.97	2.194399	5.546648

4.98	2.565759	5.889813
4.99	2.868112	6.146465
5	3.08477	6.306036

Figura 5 - Comparação dos Resultados Equação 4



4 CONCLUSÕES

É possível concluir com os estudos realizados sobre as equações diferenciais ordinárias, especificamente os métodos de Euler e Runge-Kutta, que com estes métodos, aplicados, comparando com o método de *Wavelet*, consegue-se comprovar e atribuir uma validade aos testes realizados com o método de *Wavelets*.

Diversas áreas da ciência e da técnica aplicam a teoria de *Wavelets* com muito sucesso, entre as quais estão: a astronomia, acústica, engenharia nuclear, codificação de sub-bandas, processamento de sinais e imagens, neurofisiologia, música, imagens de ressonância magnética, discriminação de voz, óptica, fractais, turbulência, previsão sísmica, visão humana, além de aplicações na matemática pura como a solução de equações diferenciais em derivadas parciais.

O trabalho realizado tem grandes perspectivas nas comparações realizada através do auxílio da computação, especificamente da linguagem de *scripts* Javascript com os *Wavelets*, pois esta linguagem é muito poderosa em termos de resolução de equações diferenciais e análise dos resultados.

Existem grandes perspectivas para a integração da área computacional com os cálculos aplicados, ou então até mesmo à matemática simples. Trazendo oportunidade para o surgimento de novos métodos computacionais ou o aprimoramento dos métodos já existentes,

assim gerando avanços tecnológicos marcantes para os meios de transmissão e até mesmo da computação que conhecemos hoje em dia.

REFERÊNCIAS

BACHMAN, G.; NARICI, L.; BECKESTEIN, E. *Fourier and wavelet analysis*. New York: Springer-Verlag, 2000.

DAUBECHIES, I. Ten lectures on wavelet. *CBS – NSF Regional Conferences in Applied Mathematics*, v. 61, SIAM, 1992.

GABOR, D. Theory of communication. *J. Inst. Elect. Eng.*, v. 92, n. 3, p. 429-457, 1946.

HAAR, A. Zur theories der orthogonalen funktionen systems, *Math. Ann*, v. 69, p. 331- 371, 1910.

HERNÁNDEZ, E. Ondículas y tecnologia. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apli.*, v. 25, p. 39-54, 2003.

MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing*. London: Academic Press, 1998.

MEYER, Y. *Ondelettes et opérateurs I: Ondelettes*. Paris: Hermann, 1990.

PAZOS, R. P. Teoria de wavelets y sus aplicaciones. *XXV Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana*, SMP, 2007.

POPULARIKAS, A. D. et al. *The transforms and applications handbook*. Boca Raton: CRC Press, 1995.